

## Übungen zur Analysis 3 Lösung

### 8.1 Momente der Standardnormalverteilung.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Formel (20)<sup>1</sup> aus Beispiel 1.153<sup>1</sup> für alle  $k \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(ik)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2/2} dx = e^{-k^2/2},$$

indem Sie zeigen, dass sich hier Summe und Integral vertauschen lassen.

(b) Folgern Sie für alle  $m \in \mathbb{N}_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2m} e^{-x^2/2} dx &= \frac{(2m)!}{2^m m!}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2m+1} e^{-x^2/2} dx &= 0. \end{aligned}$$

### Lösung

(a) Nach 1.153, (20) gilt  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-x^2/2} dx = e^{-k^2/2}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Sei

$$f_m(x) := \sum_{n=0}^m \frac{(ik)^n}{n!} x^n e^{-x^2/2} \rightarrow f(x) := e^{itx} e^{-x^2/2}$$

und mit dominierter Konvergenz -

$$|f_m(x)| \leq e^{-x^2} \sum_{n=0}^m \frac{|ik|^n |x|^n}{n!} \leq e^{-x^2/2 + |k||x|} = e^{|k|^2} e^{-(|x|/2 - |k|)^2} \quad x - \text{integrierbar}$$

- erhalten wir  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^m \frac{(ik)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2/2} dx = e^{-k^2/2}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

(b) Siehe Lösung zu 7.3. (c).

### 8.2 $\epsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung der Absolutstetigkeit.

Es seien  $\mu, \nu$  zwei endliche Maße auf dem gleichen messbaren Raum  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(a)  $\nu \ll \mu$ ,

(b)  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{A} : [\mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \epsilon]$ .

---

<sup>1</sup>Skript Analysis III.

Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel auch, dass die Äquivalenz falsch werden kann, wenn zwar  $\mu$  endlich ist,  $\nu$  hingegen nur  $\sigma$ -endlich.

### Lösung

(a)  $\Rightarrow$  (b): Beweis durch Widerspruch. Angenommen (b) gelte nicht, d.h. es existiert ein  $\epsilon > 0$ , so dass für alle  $\delta > 0$  eine Menge  $A_\delta$  existiert mit  $\mu(A_\delta) < \delta$ , aber  $\nu(A_\delta) \geq \epsilon$ .

Falls die Mengen  $A_\delta$  geschachtelt sind (d.h.  $A_\delta \supset A_{\delta'}$  für  $\delta < \delta'$ ), folgt die Aussage sofort, denn für eine Folge  $\delta_n \downarrow 0$  und  $A_n = A_{\delta_n}$  gilt wegen der Endlichkeit von  $\mu$  und  $\nu$  und der  $\sigma$ -Stetigkeit von Maßen, dass

$$\mu(\cap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) \leq \lim_n \delta_n = 0,$$

aber

$$\nu(\cap_n A_n) = \lim_n \nu(A_n) \geq \epsilon,$$

im Widerspruch zur Absolutstetigkeit von  $\nu$  bezüglich  $\mu$ .

Sind die  $A_n$  nicht absteigend, betrachten wir  $B_n = \cap_{k=1}^n \cup_{j \geq k} A_j$ . Dann ist  $B_n$  eine absteigende Folge und es gilt

$$\mu(B_n) = \mu(\cap_{k=1}^n \cup_{j \geq k} A_j) \leq \mu(\cup_{j \geq n} A_j) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \mu(A_j).$$

Wählen wir  $\delta_n = 2^{-n}$ , so folgt  $\mu(B_n) \leq 2^{-n}$ . Da  $B_n$  absteigend ist, folgt aus der Endlichkeit der beiden Maße, dass

$$\mu(\cap_n B_n) = \lim_n \mu(B_n) \leq \lim_n 2^{-n} = 0.$$

Andererseits gilt für  $\cap_n B_n$ , dass

$$\nu(\cap_n B_n) = \lim_n \nu(B_n) \geq \mu(A_n) \geq \epsilon,$$

wiederum im Widerspruch zur Absolutstetigkeit.

(b)  $\Rightarrow$  (a): Sei  $\mu(A) = 0$ . Es ist zu zeigen, dass auch  $\nu(A) = 0$  gilt. Dazu beachte, dass nach Voraussetzung  $\delta_n > 0$  existieren, so dass die Implikation

$$\mu(B) < \delta_n \Rightarrow \nu(B) < \frac{1}{n}$$

gilt. Wegen  $\mu(A) = 0 < \delta_n$  für alle  $n$ , gilt also auch  $\nu(A) < \frac{1}{n}$  für alle  $n$  und folglich  $\nu(A) = 0$ .

Da wir in (b)  $\Rightarrow$  (a) die Endlichkeit von  $\mu$  und  $\nu$  nirgends verwendet haben, muss also (a)  $\Rightarrow$  (b) falsch sein, falls  $\nu$  nur  $\sigma$ -endlich ist. Dazu betrachte auf  $(0, 1)$  die Maße  $\nu(A) := \int_A 1/t \, d\lambda_1$  und  $\mu = \lambda_1$ . Dann ist nach Definition (bzw. nach der einfachen Implikation im Satz von Radon-Nikodym)  $\nu$  absolutstetig bzgl.  $\mu$ , da eine Dichte existiert. Andererseits gilt für die Intervalle  $(0, 1/n)$ , dass  $\mu((0, 1/n)) = 1/n$ , aber  $\nu((0, 1/n)) = \infty$  für alle  $n$ .

**8.3ε Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei nichtnegativen messbaren Integranden.** Es seien  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  und  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume. Weiter sei  $\tau : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_2 \times \Omega_1$ ,  $\tau(\omega_1, \omega_2) = (\omega_2, \omega_1)$  die Vertauschungsabbildung. Zeigen Sie:

- (a)  $\tau$  ist  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ - $\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_1$ -messbar.  
 (b)  $\tau[\mu_1 \otimes \mu_2] = \mu_2 \otimes \mu_1$ .  
 (c) Folgern Sie mit dem Satz von Fubini: Für alle  $f \in \overline{M}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$  gilt:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2)$$

## Lösung

Sei  $B_{21} := A_2 \times A_1 \in \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_1$ .

- (a) Wir überprüfen die Messbarkeit auf dem Erzeuger  $\mathcal{Q}$  (vgl. Definition 1.30 und Satz 1.77<sup>1</sup>):  $\tau^{-1}(B_{21}) = A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ , d. h.  $\tau$   $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ - $\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_1$ -messbar.  
 (b) Nach der Eindeutigkeitsaussage in Satz 2.3 genügt es wieder die Gleichheit auf Quadern  $B_{21}$  zu zeigen:

$$\tau[\mu_1 \otimes \mu_2](B_{21}) = \mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \mu_2 \otimes \mu_1(B_{21}).$$

- (c) Die Aussage folgt direkt aus dem Satz von Fubini (2.10<sup>1</sup>), Satz 1.128 (Integral bezüglich des Bildmaßes) und Teil (b)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \tau^{-1} \tau(\omega) \mu_1 \otimes \mu_2(d\omega) \\ &= \int_{\Omega_2 \times \Omega_1} f \tau^{-1}(\omega) \underbrace{\mu_2 \otimes \mu_1(d\omega)}_{\tau[\mu_1 \otimes \mu_2]} \\ &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f \tau^{-1}(\omega_2, \omega_1) \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2) \\ &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2). \end{aligned}$$

**8.4** (a) Gegeben sei für  $n \in \mathbb{N}$  das  $n$ -dimensionale Simplex

$$\Delta_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{k=1}^n x_k \leq 1 \right\}.$$

Beweisen Sie, dass es das Volumen

$$\lambda_n(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$$

besitzt.

- (b) Berechnen Sie für  $t \in \mathbb{R}^+$  und  $n \in \mathbb{N}$  das Volumen

$$V_n(t) := \lambda_n(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < t\}).$$

## Lösung

(a) Gegeben sei für  $n \in \mathbb{N}$  das  $n$ -dimensionale Simplex

$$\Delta_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{k=1}^n x_k \leq 1 \right\}.$$

Beweisen Sie, dass es das Volumen

$$\lambda_n(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$$

besitzt.

(b) Berechnen Sie für  $t \in \mathbb{R}^+$  und  $n \in \mathbb{N}$  das Volumen

$$V_n(t) := \lambda_n(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < t\}).$$

**Lösung:** (a) Wir beweisen die Aussage per Induktion nach  $n$ . Für  $n = 1$  ist die Aussage klar. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass  $\lambda^n(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$  bereits bewiesen ist und folgern, dass auch  $\lambda^{n+1}(\Delta_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!}$  stimmt.

Dazu beachte, dass

$$\Delta_{n+1} = \coprod_{t \in [0,1]} \Delta_{n+1} \cap \mathbb{R}^n \times \{t\} = \coprod_{t \in [0,1]} \left\{ (x_1, \dots, x_n, t) \mid \sum_{k=1}^n x_k \leq 1 - t \right\}.$$

Mit der Notation  $\Delta_n^{1-t} = \{(x_1, \dots, x_n, t) \mid \sum_{k=1}^n x_k \leq 1 - t\}$  folgt aus Satz von Fubini angewandt auf  $1_{\Delta_{n+1}}$  also

$$\lambda_{n+1}(\Delta_{n+1}) = \int 1_{\Delta_{n+1}} d\lambda_{n+1} = \int_0^1 \lambda_n(\Delta_n^{1-t}) dt.$$

Wir behaupten, dass  $\lambda_n(\Delta_n^{1-t}) = (1-t)^n \lambda_n(\Delta_n)$ . Man sieht leicht, dass  $1_{\Delta_n^{1-t}} = 1_{\Delta_n} \circ (x \mapsto \frac{1}{1-t}x)$ . Also gilt nach Beispiel 1.129 mit der Schreibweise  $S_{1/(1-t)} = (x \mapsto \frac{1}{1-t}x)$ , dass

$$\lambda_n(\Delta_n^{1-t}) = \int 1_{\Delta_n^{1-t}} d\lambda_n = \int 1_{\Delta_n \circ S_{1/(1-t)}} d\lambda_n = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{-n} \int 1_{\Delta_n} d\lambda_n = (1-t)^n \lambda_n(\Delta_n).$$

Also ist

$$\lambda_{n+1}(\Delta_{n+1}) = \int_0^1 (1-t)^n \lambda_n(\Delta_n^{1-t}) dt = \left[ -\frac{1}{n+1} (1-t)^{n+1} \right]_0^1 \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

(b) Wir schreiben  $W_n(t) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < \dots < x_n < t\}$ . Damit ist  $V_n(t) = \lambda_n(W_n(t))$  und es gilt

$$W_{n+1}(t) = \coprod_{t' \in (0,t)} W_n(t') \times \{t'\}.$$

Damit gilt

$$V_{n+1}(t) = \lambda_{n+1}(W_{n+1}(t)) = \int_0^t \lambda_n(W_n(t')) dt' = \int_0^t V_n(t') dt'$$

und sobald wir eine Formel für  $V_n(t)$  geraten haben, können wir diese induktiv beweisen.

Um eine geeignete Formel für  $V_n(t)$  zu raten, berechnen wir

$$V_1(t) = \lambda_1((0, t)) = t, \quad V_2(t) = \int_0^t t' dt' = \frac{1}{2}t^2.$$

Wir behaupten also, dass  $V_n(t) = \frac{1}{n}t^n$ . Für  $n = 1$  haben wir die Aussagen soeben nachgerechnet (ebenso für  $n = 2$ ). Für ein gegebenes  $n$  gelte nun  $V_n(t') = \frac{1}{n}(t')^n$  für alle  $t' > 0$ . Dann ist

$$V_{n+1}(t) = \int_0^t \frac{1}{n}(t')^n dt = \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} t^{n+1},$$

was nicht das gewünschte Ergebnis ist! Wir korrigieren uns also zu  $V_n(t) = \frac{1}{n!}t^n$  und sehen damit, dass

$$V_{n+1}(t) = \int_0^t \frac{1}{n!}(t')^n dt = \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} t^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} t^{n+1}.$$

Also gilt

$$V_n(t) = \frac{1}{n!}t^n$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $t > 0$ .